数理解析研究所講究録
1133 巻 2000 年 104-116

Painlevé 方程式の初期値空間と WKB 解析

京大数理研　竹井 義次 (Yoshitsugu TAKEI)

0　序

ここ数年，河合隆裕（京大数理研）氏や青木貴史（近畿大理工）氏と共同で，完全 WKB 解析の立場から Painlevé 方程式を考察してきた．そして，ようやく「Painlevé 方程式に対する非線型完全 WKB 解析」の理論の（少なくとも）枠組が出来上がった ([KT1], [AKT], [KT2], [T3])．しかし，この理論の有効性や正当性を示す応用例が見い出されている ([T2]) 一方で，残念ながら現状ではこの理論はいまだ「形式的な」レベルに留まっており，その解析的な意味付けが充分に明らかになったとは言い難い．本稿では，「Painlevé 方程式に対する非線型完全 WKB 解析」で中心的な役割を果たすインスタントン解の解析的な意味付けについて，我々が今持っている「夢」あるいは「感触」といったもの，そしてその周辺の風景を少し述べてみたい．数学的に新しい結果が含まれている訳ではない（それゆえ，こういう形で記録に残すことに対してかなり気が引けているのも事実である）が，初期値空間，およびそのモノドロミー保存変形との関連について既存の結果を概観する中で，何か面白そうなものがありそうだという印象を読者の方々に少しでも持って頂ければ，このレポートの目的は達したと言えよう．

1　インスタントン解

本稿で問題とするのは，Painlevé 方程式に対するインスタントン解の解析的な意味付けである．ここでまず，インスタントン解とはどんな形の解であったかを思い出しておこう．簡単の為，I 型の Painlevé 方程式

$$(P_{\mathrm{I}}) \qquad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \eta^2(6\lambda^2 + t)$$

（但し η は大きなパラメータ）を考える．この (P_{I}) に対するインスタントン解とは，次の形の無限級数として与えられる解である．

$$(1) \qquad \lambda_{\mathrm{I}}(t;\alpha,\beta) = \lambda_0(t) + \eta^{-1/2}\lambda_{1/2}(t,\eta) + \eta^{-1}\lambda_1(t,\eta) + \cdots.$$

ここで，$\lambda_0(t)$ は $6\lambda_0(t)^2 + t = 0$ により定まる t の代数函数 $\pm\sqrt{-t/6}$ であり，また $\lambda_{1/2}(t,\eta)$ は

$$(2) \qquad \lambda_{1/2}(t,\eta) = (12\lambda_0)^{-1/4}\left(\alpha((12\lambda_0)^5\eta^2)^{\alpha\beta}e^{\eta\phi_{\mathrm{I}}} + \beta((12\lambda_0)^5\eta^2)^{-\alpha\beta}e^{-\eta\phi_{\mathrm{I}}}\right)$$

という表示をもち，更に高次の項 $\lambda_{j/2}(t,\eta)$ $(j \geq 2)$ は

$$\lambda_{j/2}(t,\eta) = \sum_{k=0}^{j} b_{j-2k}^{(j/2)}(t)((12\lambda_0)^5\eta^2)^{(j-2k)\alpha\beta} e^{(j-2k)\eta\phi_{\mathrm{I}}} \tag{3}$$

という形をしている．但し α および β は任意の複素定数，また ϕ_{I} は

$$\phi_{\mathrm{I}}(t) = \int^t \sqrt{12\lambda_0(s)}ds \tag{4}$$

なる函数を表すものとする．

この表示から明らかなように，インスタントン解は α と β という 2 つの任意定数を含んでおり，その意味で (P_{I}) の一般解を表していると考えられる．インスタントン解の最も重要な性質として，次の 2 つが知られている．

(A) (P_{I}) に対しては，各 Stokes 曲線におけるインスタントン解の満たすべき接続公式が具体的に記述できる（[T3]）．

(B) 単純変わり点においては，一般の Painlevé 方程式のインスタントン解が (P_{I}) のインスタントン解に局所的に変換される（[KT2]）．

実際，この 2 つの基本性質を組み合わせれば，一般の Painlevé 方程式の接続問題を論じることが可能となる（例えば II 型の Painlevé 方程式に対する Ablowitz-Segur の接続問題，cf. [T2]）．

こうした良い性質を持っているにもかかわらず，$e^{\pm\eta\phi_{\mathrm{I}}}$ という正負が正反対の 2 つの指数函数が混在している為に，2 パラメータのインスタントン解の解析的な意味付けは全く明らかではなく，大きな問題として残されたままである．（インスタントン解の構成については，multiple-scale analysis によるもの（[AKT]）と，Hamilton 系に書き直した後 Birkhoff の標準形への特異摂動的な変換を利用するもの（[T1]）との 2 つの方法がこれまでに知られているが，いずれを用いるにしても現状では，インスタントン解が（指数函数の部分を η については次数 0 と見なした上で）$\eta^{-1/2}$ の形式巾級数として方程式を満足することしか示せていない．）上記の基本性質を用いた Painlevé 方程式の接続問題の解法を数学的に正当化する為にも，インスタントン解の解析的な意味付けを明らかにし，更に

問題： インスタントン解と真の解との対応をつけよ，

あるいは，Okamoto [O1] により構成された初期値空間を用いてより数学的に述べれば，

問題$'$： インスタントン解が初期値空間の中にどのように埋め込まれているかを明らかにせよ，

という問題に対する解答が得られることが望ましい．

以下では，この問題について考察を加えていく．

2 Riccati 方程式の場合

前節の最後に述べた問題に対する考察の第一歩として，インスタントン解の発散の困難がどこに由来するかを見る為に，本節では，より簡単な場合である Riccati 方程式を論じることにしよう．

Riccati 方程式

$$\frac{du}{dx} = \eta(Q(x) - u^2) \tag{R}$$

（前節同様 η は大きなパラメータ， $Q(x)$ は例えば多項式）に関しては，良く知られた通り， Riemann 球面 $P^1(\mathbb{C})$ が初期値空間を与える．即ち， Riccati 方程式 (R) は $\mathbb{C}_x \times P^1(\mathbb{C})$ 上に複素 1 次元の foliation を定めており， (R) の解空間全体は $P^1(\mathbb{C})$ によってパラメータ付けされている．

この Riccati 方程式に対しても，次のようなインスタントン解が存在する．

$$u_\pm(x;\alpha) = u_\pm^{(0)}(x;\eta) + \alpha u_\pm^{(1)}(x;\eta)e^{-\eta\phi_\pm} + \alpha^2 u_\pm^{(2)}(x;\eta)e^{-2\eta\phi_\pm} + \cdots. \tag{5}$$

ここで， $u_\pm^{(0)}(x;\eta)$ は

$$u_\pm^{(0)} = \pm\sqrt{Q(x)} + \eta^{-1}u_{\pm,1}(x) + \eta^{-2}u_{\pm,2}(x) + \cdots \tag{6}$$

という展開を持ったそれ自身が (R) の形式解となるような η^{-1} の形式巾級数であり， $u_\pm^{(j)}(x;\eta)$ $(j \geq 1)$ は $u_\pm^{(0)}$ から（一意に）定まるやはり η^{-1} の形式巾級数，そして α が任意の複素定数を表し，また $\phi_\pm$ は

$$\phi_\pm(x) = \pm 2\int^x \sqrt{Q(y)}dy \tag{7}$$

という函数である．

Painlevé 方程式の場合と異なり，この場合は正負が反対の 2 つの指数函数が混在している訳ではないが， $u_\pm$ のいずれか一方はやはり発散の困難を有する．ところが， Riccati 方程式の場合， Schrödinger 方程式との関連を通して見れば，この発散の困難の由来が次のように説明できるのである．よく知られたように， (R) の解 $u(x)$ に対して $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \exp\left(\eta\int^x u(y)dy\right), \quad \text{i.e.,} \quad u(x) = \eta^{-1}\frac{d}{dx}\log\psi(x) \tag{8}$$

で定義すれば， $\psi(x)$ は Schrödinger 方程式

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \eta^2 Q(x)\psi \tag{S}$$

を満足する．特に，この変換 (8) により， (R) の解 $u_\pm^{(0)}$ は (S) の WKB 解 $\psi_\pm = \exp\left(\eta\int^x u_\pm^{(0)}dy\right)$ に対応する．ここで， (S) の一般解 $c_+\psi_+ + c_-\psi_-$ に対応する (R)

の解を（形式的に）求めてみると，

$$\begin{aligned}
&\eta^{-1}\frac{d}{dx}\log\left(c_+\psi_+ + c_-\psi_-\right)\\
&= \eta^{-1}\frac{d}{dx}\log\left\{c_+\psi_+\left(1+\frac{c_-\psi_-}{c_+\psi_+}\right)\right\}\\
&= \eta^{-1}\frac{d}{dx}\log\psi_+ + \eta^{-1}\frac{d}{dx}\log\left(1+\frac{c_-\psi_-}{c_+\psi_+}\right)\\
&= \eta^{-1}\frac{d}{dx}\log\psi_+ + \eta^{-1}\frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{c_-}{c_+}\right)^n\left(\frac{\psi_-}{\psi_+}\right)^n\right\}\\
&= u_+^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{c_-}{c_+}\right)^n\left(u_-^{(0)}-u_+^{(0)}\right)\exp\left(n\eta\int^x\left(u_-^{(0)}-u_+^{(0)}\right)dy\right)\\
&= u_+\left(x;\frac{c_-}{c_+}\right).
\end{aligned}$$

同様に，同じ計算を $c_-\psi_-$ を中心として展開して行えば，$u_-(x;c_+/c_-)$ という (R) の解が得られる．つまり，$u_+(x;\alpha)$ と $u_-(x;1/\alpha)$ は実は $\psi_\pm$ の線型結合で表わされる (S) の同一の解に対応しており（従って，本来

$$u_+(x;\alpha) = u_-\left(x;\frac{1}{\alpha}\right) \tag{9}$$

と見なされるべきもの），そのうちの一方が発散の困難を有するのは $\log(1+z)$ の $z=0$ における Taylor 展開の式を絶対値の大きい z に対しても形式的に適用するという「過ち」を犯したが為だった訳である．

更に，次のような言い方をしても良いだろう．我々は $u_\pm(x;\alpha)$ というインスタントン型の形式解の 2 つのクラスを持っている．ところが，本来の解析的な意味ではこれらの 2 つのクラスは独立ではなく，(9) という関係式で結ばれている．即ち，$u_\pm(x;\alpha)$ という解空間の 2 枚のチャートが (9) という式で貼り合わされて，結果としてインスタントン解の全体は $P^1(\mathbb{C})$ という多様体を形作る．この多様体は Riccati 方程式の初期値空間に他ならない．

我々は，これと同じような状況が Painlevé 方程式のインスタントン解についても起こっているだろう，と想像している．ただ，Painlevé 方程式の場合には，Riccati 方程式の場合にこの現象を見事に説明した Schrödinger 方程式 (S) に相当する対象が何であるかが現時点では良くわからない．講演の時に野海正俊（神戸大自然）さんに指摘されたように，τ 函数は確かにその有力な候補の一つであろうと思われるが，残念ながら今の所そうした兆候は見い出されていない．他の有力な候補として，もう一つ，モノドロミー保存変形が考えられる．過去に知られた結果等から判断すると，一般の Painlevé 方程式は別として，少なくとも構造が簡単な (P_{I}) の場合にはこのモノドロミー保存変形がある程度の知見を与えているように思われる．次節では，そのあたりの状況を見ていくことにしよう．

3 Painlevé I 型方程式の場合

Painlevé I 型方程式，あるいはそれと同等な Hamilton 系

$$(H_{\mathrm{I}})\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dt} = \eta\dfrac{\partial K_{\mathrm{I}}}{\partial\nu} = \eta\nu \\[2mm] \dfrac{d\nu}{dt} = -\eta\dfrac{\partial K_{\mathrm{I}}}{\partial\lambda} = \eta\,(6\lambda^2+t) \end{cases}$$

（ここで Hamiltonian K_{I} は $K_{\mathrm{I}} = \nu^2/2-(2\lambda^3+t\lambda)$ により与えられる）の初期値空間（但し $\eta\equiv 1$ とする）は，Okamoto [O1] において示されたように，Hirzebruch 曲面 $\Sigma^{(2)}\simeq P^1(T^*(P^1(\mathbb{C})))$ である．より具体的には，2枚のチャート $\mathbb{C}^2_{(\lambda,\nu)}$ と $\mathbb{C}^2_{(\tilde\lambda,\tilde\nu)}$ を

$$(10)\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\tilde\lambda^2}\left[\left((\tilde\lambda\tilde\nu+\dfrac{1}{2})\tilde\lambda+\dfrac{t}{2}\right)\tilde\lambda^4+1\right]^{-1} \\[2mm] \nu = -\dfrac{2}{\tilde\lambda^3}\left[\left((\tilde\lambda\tilde\nu+\dfrac{1}{2})\tilde\lambda+\dfrac{t}{2}\right)\tilde\lambda^4+1\right]^{-1} \end{cases}$$

という変換函数で貼り合わせて得られるような多様体である．即ち，Painlevé I 型方程式 (P_{I})（あるいは (H_{I})）は $\mathbb{C}_t\times\Sigma^{(2)}$ 上に複素1次元の foliation を定める．この初期値空間 $\Sigma^{(2)}$ と第1節で述べたインスタントン解 $\lambda_{\mathrm{I}}(t;\alpha,\beta)$ との関係を明らかにすることが我々の目標である．以下本節では，モノドロミー保存変形を利用してこの問題を考えていくことにしよう．

良く知られたように（cf. [JMU], [O2] etc.），Painlevé 方程式はある種の線型常微分方程式（系）のモノドロミー保存変形を記述する条件として現われる．特に (P_{I})（より正確には (H_{I})）は，次の2階方程式 (SL_{I}) の不確定特異点 $x=\infty$ における Stokes 係数が t に依らない条件を記述している．

$$(SL_{\mathrm{I}})\qquad \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\eta^2 Q_{\mathrm{I}}(x,t,\lambda,\nu,\eta)\right)\psi = 0,$$

但し，ポテンシャル Q_{I} は，上述の Hamilton 系 (H_{I}) の Hamiltonian K_{I} を用いて次式で与えられる．

$$(11)\qquad Q_{\mathrm{I}} = 4x^3+2tx+2K_{\mathrm{I}}-\eta^{-1}\frac{\nu}{x-\lambda}+\eta^{-2}\frac{3}{4(x-\lambda)^2}.$$

線型方程式 (SL_{I}) の場合，$x=\infty$ は Poincaré rank が $5/2$ の不確定特異点であり，従って全部で5個の Stokes 係数が定まる．この5個の Stokes 係数が t に依らない（infinitesimal な）条件を記述する方程式として (P_{I}) が現われるのである．

ここで Stokes 係数の定義を思い出しておこう．不確定特異点 $x=\infty$ において (SL_{I}) は

$$(12)\qquad \Psi_\pm = x^{-3/4}\exp\left\{\pm\eta\left(\frac{4}{5}x^{5/2}+tx^{1/2}\right)\right\}\left(1+O(x^{-1/2})\right)$$

という形の形式解を持っている．今， $x=\infty$ のまわりの角領域 $U_j=\{x\in\mathbb{C}\ ;\ (2j-3)\pi/5<\arg x<(2j+1)\pi/5\}$ を考えれば，各 U_j において漸近展開の意味で

$$(\psi_+^{(j)},\psi_-^{(j)})\sim(\Psi_+,\Psi_-) \tag{13}$$

を満たす (SL_{I}) の真の解の組 $(\psi_+^{(j)},\psi_-^{(j)})$ が一意に定まる．その中でも特に，重なり合う隣同士の角領域における真の解の間に成立する線型関係式

$$(\psi_+^{(j-1)},\psi_-^{(j-1)})=(\psi_+^{(j)},\psi_-^{(j)})S_j \tag{14}$$

（但し S_j は複素 2×2 行列）に注目すると，それは次の形をしていることがわかる．

$$S_j=\begin{pmatrix}1&0\\ s_j&1\end{pmatrix}\ (j\text{ が奇数の時})\ ,\quad \text{あるいは}\quad \begin{pmatrix}1&s_j\\ 0&1\end{pmatrix}\ (j\text{ が偶数の時})\ . \tag{15}$$

この行列 S_j の非対角成分 s_j が， $x=\infty$ における (SL_{I}) の Stokes 係数である．

こうした (SL_{I}) の Stokes 係数の性質を詳しく調べたのは，Its, Kapaev, Kitaev といったロシアの人達であった（もっとも彼らは， (SL_{I}) という２階の単独方程式ではなく，それと同等な連立方程式系を扱っているのだが....）．例えば， (SL_{I}) という方程式は無限遠点を除いては $x=\lambda$ に（見かけの）特異点を持つのみでありしかもその回りでのモノドロミー行列は単位行列の (-1) 倍であること，他方 (12) の形式解 $\Psi_\pm$ （より正確にはその各係数）を $\arg x=0$ から $\arg x=2\pi$ まで（つまり $x=\infty$ の回りを一周）解析接続すればそれぞれ $i\Psi_\mp$ （複号同順， i は虚数単位）となることから，(14) で与えられる行列 S_j は次式を満たさねばならない (cf. [Ka], [KaKi], [Ki2] etc.)．

$$S_5S_4S_3S_2S_1=\begin{pmatrix}0&i\\ i&0\end{pmatrix}. \tag{16}$$

これより (SL_{I}) の Stokes 係数の満たすべき函数等式

$$1+s_{j-1}s_j+is_{j+2}=0\quad (j\in\mathbb{Z}) \tag{17}$$

（但し $s_{j+5}=s_j$ により任意の整数 j に対して s_j は定義されているとみなす）が得られる．

Remark. この函数等式から，独立な Stokes 係数の個数は２であることを見るのは易しい．実際，例えば $1+s_2s_3\neq 0$ においては s_2 と s_3 が独立なパラメータとなり，他の s_j は (17) を用いて

$$s_1=\frac{i-s_3}{1+s_2s_3},\quad s_4=\frac{i-s_2}{1+s_2s_3},\quad s_5=i(1+s_2s_3) \tag{18}$$

のように表される．独立な Stokes 係数の個数が２であるというのは， (P_{I}) が２階の方程式であることに対応している．

即ち， (SL_{I}) の Stokes 係数は

$$\mathcal{M}=\{(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5)\in\mathbb{C}^5\ ;\ 1+s_{j-1}s_j+is_{j+2}=0\ (j\in\mathbb{Z})\} \tag{19}$$

という多様体に含まれる．この多様体 $\mathcal{M}$ をロシアの人達は “manifold of monodromy data”，あるいは “monodromy manifold” と呼んだ．

さて，この多様体 $\mathcal{M}$ に関して， Kapaev-Kitaev [KaKi] において次の結果が報告された．

Theorem 1 (Kapaev-Kitaev, [KaKi])
(P_{I}) の解と多様体 $\mathcal{M}$ は *bijective* に対応する．即ち， (P_{I}) の解 $\lambda(t)$ に対して，それを Q_{I} に代入して得られる線型方程式 (SL_{I}) の *Stokes* 係数 $(s_1,\cdots,s_5)$ を対応させる自然な写像

$$\{(P_{\mathrm{I}})\text{ の解}\}\ni\lambda(t)\longmapsto(\text{対応する }(SL_{\mathrm{I}})\text{ の }\textit{Stokes}\text{ 係数})\in\mathcal{M} \tag{20}$$

は，全単射である．

詳しい証明については [Ki2] を見てほしい（[Ki1], [Ki3] も参照）．何かの参考にでもなるかと思い，証明の概略を以下の Appendix で述べた．

この定理により， (P_{I}) の初期値空間 $\Sigma^{(2)}$ は上記の多様体 $\mathcal{M}$ と同一視できることになった．我々の考えたい問題「インスタントン解と初期値空間の関係は？」に対しても，この同一視が手がかりになる．実際， [T3] において，インスタントン解の場合に対応する (SL_{I}) の Stokes 係数が explicit に（formal だが η に関して all order で）計算された．それをまとめたのが表 1 である．

[*For* $2\pi/5<\arg\lambda_0<3\pi/5$]

$$\begin{cases} s_1 &= ie^{-i\pi E/2}-i\beta\chi(-E)\\ s_2 &= -\alpha\chi(E)e^{-i\pi E/4}\\ s_3 &= i\beta\chi(-E)e^{i\pi E/2}\\ s_4 &= ie^{-i\pi E/2}+\alpha\chi(E)e^{-3i\pi E/4}\\ s_5 &= ie^{i\pi E/2}.\end{cases}$$

[*For* $-3\pi/5<\arg\lambda_0<-2\pi/5$]

$$\begin{cases} s_1 &= ie^{i\pi E/2}-i\beta\chi(-E)\\ s_2 &= ie^{-i\pi E/2}\\ s_3 &= ie^{i\pi E/2}-\alpha\chi(E)e^{3i\pi E/4}\\ s_4 &= i\beta\chi(-E)e^{-i\pi E/2}\\ s_5 &= \alpha\chi(E)e^{i\pi E/4}.\end{cases}$$

但し $E=-8\alpha\beta,\quad \chi(z)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(z/4+1)}2^{z/4+1}.$

表 1：インスタントン解の場合に対応する (SL_{I}) の Stokes 係数

インスタントン解については，対応する (SL_{I}) の Stokes 係数の具体形は， Painlevé 方程式の変数 t が属する Stokes 領域によって異なる．（実際， Stokes 曲線の上では well-defined ではない．）表 1 では，特に $\{t\in\mathbb{C}\ ;\ -\pi/5<\arg t<\pi/5\}$ という Stokes

領域における結果を記した．ここで，(P_{I}) のインスタントン解は，$\lambda_0(t) = \pm\sqrt{-t/6}$ の複号の選び方により 2 種類あったことに注意して欲しい（それぞれ $\lambda_{\mathrm{I},\pm}(t;\alpha,\beta)$ という記号で表すことにする）．対応する (SL_{I}) の Stokes 係数の形は，この $\lambda_0(t)$ の複号の選び方にも依る．表 1 の左側は，上記の Stokes 領域において $\arg\lambda_0$ として $2\pi/5 < \arg\lambda_0 < 3\pi/5$ を満たすものを取った時の (SL_{I}) の Stokes 係数を，同様に右側は，$-3\pi/5 < \arg\lambda_0 < -2\pi/5$ を満たすものを取った時の Stokes 係数をそれぞれ記述したものである．

ここまでの結果をまとめると，次のようになる．

初期値空間		manifold of monodromy data		インスタントン解
$\Sigma^{(2)}$	$\cong$	$\mathcal{M}$	$\longleftarrow$	$\{\lambda_{\mathrm{I},\pm}(t;\alpha,\beta)\}$

左側の同型写像は (20) で与えられたもの，右側の左向きの矢印は表 1 で記述されたインスタントン解から (SL_{I}) の Stokes 係数への対応である．Kapaev-Kitaev の定理により (SL_{I}) の Stokes 係数は (P_{I}) の初期値空間を与えていると見なせるので，同一の Stokes 係数 $(s_1,\cdots,s_5)$ を与えるようなインスタントン解 $\lambda_{\mathrm{I},+}(t;\alpha,\beta)$ と $\lambda_{\mathrm{I},-}(t;\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ は (P_{I}) の同じ解を表現しているはずである．更に，$\lambda_0(t)$ の同じ分枝を選んだ解同士の間にも，異なるパラメータ (α,β) を持ちながら対応する Stokes 係数が一致する場合があるので，これらの解も (P_{I}) の同じ解を表しているということになる．こうした「貼り合わせ」を通じて，インスタントン解 $\lambda_{\mathrm{I},\pm}(t;\alpha,\beta)$ は，(P_{I}) の初期値空間と結び付いているのである．

(P_{I}) の場合は，一応これで第 1 節で述べた問題に対する一つの解答が与えられたということになるだろう．しかし，Painlevé 方程式全体を見渡した時，これでは満足すべき解答が得られたとは言えないと思う．少なくとも初期値空間とインスタントン解については，全ての Painlevé 方程式に対して統一的な記述が得られている．ところが “manifold of monodromy data” については，II 型に対しては OK であり (cf. [Ki3]) IV 型に対してもいくつかの結果はあるものの，一般の場合にはまだ具体的な記述は得られていないように思われる（例えば [FIK] も参照）．我々としては，できれば初期値空間とインスタントン解を直接に結び付けるような mechanism が欲しい．((P_{I}) の場合でも，上記の同型写像 (20) は非常に超越的であり，少なくとも筆者には「直接に」結び付いた感じがしない．）もしそうしたものが見い出されたならば，初期値空間の具体的な記述を与えた Takano 等の仕事 [ST], [MMT] とインスタントン解との関連（一例を挙げれば，Takano 等の記述において用いられた貼り合わせのチャートの枚数と，インスタントン解の個数，即ち λ_0 を決定する代数方程式の次数，とが一致するという事実）もより明らかになるのではないかと期待される．こうした初期値空間との関連や，解同士の間の貼り合わせの構造を直接的に見ることができるようなインスタントン解の解析的な意味付けは，どのようにすれば得られるのだろうか？

Appendix　Kapaev-Kitaev の定理の証明の概略

この Appendix では，Kapaev-Kitaev の定理の証明の概略を述べる．単に「証明の流れ」を追うだけなので，詳しい証明に興味を持たれた方は原論文 [Ki2] 及び [Ki1] を参照されたい（[Ki3] も参考になろう）．

以下，大きなパラメータ η は恒等的に 1 と仮定する．また，例えば $s_2 s_5 \neq 0$ が成り立つような時のみを考えることにする．彼らの証明においては，2階の単独方程式 (SL_{I}) の代わりに，(SL_{I}) と同等な次の連立方程式系を扱う．

$$\frac{d\Psi}{dx} = \left((4x^4 + t + 2\lambda^2)\sigma_3 - i(4\lambda x^2 + t + 2\lambda^2)\sigma_2 - (2\nu x + \frac{1}{2x})\sigma_1\right)\Psi \tag{21}$$

但し

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

(P_{I}) の解 $\lambda(t)$（より正確には (H_{I}) の解 $(\lambda(t), \nu(t))$）に対して，それを係数に代入した方程式 (21) の $x = \infty$ における Stokes 係数 $(s_1, \cdots, s_5)$ を対応させる写像が全単射であることを言えば良い．

<u>単射であること</u>

単射を示すのは難しくない．実際，(P_{I}) の 2 つの解 $\lambda_1(t)$ と $\lambda_2(t)$ が同じ Stokes 係数を与えたとしよう．この時，Ψ_1, Ψ_2 をそれぞれ対応する (21) の解（基本解系）であって，例えば第 3 節に出てきた角領域 U_0 における漸近的な性質で一意に定まるものとすれば，Ψ_1 と Ψ_2 は $x = \infty$ の回りの全ての角領域で同じ漸近展開を持つので，$\Psi_1^{-1}\Psi_2$ は全平面で正則かつ有界となる．従って，Liouville の定理から $\Psi_1 = \Psi_2$，よって $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$ を得る．

<u>全射であること</u>

まず $\phi = \arg t$ を，例えば $3\pi/5 + \epsilon \leq \phi \leq \pi - \epsilon$ $(\epsilon > 0)$ を満たすように固定した上で，次の変換（"Boutroux transformation"）を行う．

$$\begin{aligned} \xi &= \left(e^{-i\phi}t\right)^{-1/4} x, & \tau &= \frac{4}{5}\left(e^{-i\phi}t\right)^{5/4}, \\ \lambda &= \left(e^{-i\phi}t\right)^{1/2} u, & \nu &= e^{-i\phi}\left(e^{-i\phi}t\right)^{3/4}\left(v + \frac{2u}{5\tau}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

以下，τ を大きなパラメータと考えて，τ に関する漸近解析の視点から方程式 (21) を解析する．その WKB 解を

$$\Psi_{\pm} = \exp\left(\tau \int^{\xi} \mu(\xi) d\xi\right) \times (\text{ amplitude }) \tag{24}$$

で表そう．ここで $\mu(\xi)$ は次式で与えられる．

$$(\mu(\xi))^2 = 16\xi^8 + 8e^{i\phi}\xi^4 + 4a_\phi \xi^2 + b_\phi + \left(\frac{2}{5\tau\xi}\right)^2, \tag{25}$$

但し

$$a_\phi = e^{-2i\phi}\left(v+\frac{2u}{5\tau}\right)^2 - 2e^{i\phi}u - 4u^3, \quad b_\phi = \frac{8}{5t}e^{-i\phi}\left(v+\frac{2u}{5\tau}\right). \tag{26}$$

(25) の定める $\mu(\xi)$ の Riemann 面を，以下では Γ で表す．

Step 1. (Direct problem の考察)　次の仮定 (Ass) を置く．

$$(Ass)\quad \begin{cases} a_\phi &= A_\phi + \dfrac{B_\phi}{\tau} \quad \text{with } A_\phi = \text{Const.},\ B_\phi = O(1) \\ b_\phi &= O\left(\dfrac{1}{\tau}\right) \end{cases} \qquad (\text{as } \tau \longrightarrow \infty).$$

仮定 (Ass) の下では，Riemann 面 Γ は漸近的には次の Riemann 面 $\hat{\Gamma}^*$ で近似される．

$$\hat{\Gamma}^* : w^2 = z^3 + \frac{1}{2}e^{i\phi}z + \frac{1}{4}A_\phi = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) \quad (\text{但し } z=\xi^2) \tag{27}$$

この $\hat{\Gamma}^*$ に付随する楕円函数を u^* で表そう．（Boutroux により見い出されたように，(P_{I}) の解はこの u^* に漸近的に近付くと期待される．）即ち，u^* は微分方程式

$$e^{-2i\phi}\left(\frac{du^*}{d\tau}\right)^2 = 4(u^*)^3 + 2e^{i\phi}u^* + A_\phi \tag{28}$$

の解であり，Weierstrass の $\wp$ 函数を用いて

$$u^* = \wp(e^{i\phi}\tau - \tau_0 : g_2, g_3), \qquad g_2 = -2e^{i\phi},\ g_3 = -A_\phi \tag{29}$$

と表される．但し，我々は (Ass) を仮定しているので，独立変数 τ は

$$\tau \in \mathcal{D}_\epsilon = \{\tau \in \mathbb{R}\ ;\ \left|(e^{i\phi}\tau - \tau_0) - \left(\frac{n}{2}\Omega_a^* + \frac{m}{2}\Omega_b^*\right)\right| \geq \epsilon\} \tag{30}$$

という領域のみを動くものとする．ここで

$$\Omega_{a,b}^* = \oint_{a,b} \frac{dz}{w(z)}, \quad J_{a,b}^* = \oint_{a,b} w(z)dz \tag{31}$$

（a, b はそれぞれ，分岐点 z_1 と z_3 を結ぶカット，および z_2 と z_3 を結ぶカットの回りを一周する $\hat{\Gamma}^*$ 上の閉曲線）．

さて，以上の準備の下で，線型方程式 (21) に Fedoryuk 流の WKB 解析を適用する．少々長い計算の後に，Stokes 係数 s_2, s_5 の漸近形

$$s_2 \sim s_2^*, \quad s_5 \sim s_5^* \tag{32}$$

を得ることができる．実際，s_2^*, s_5^* は上記の閉曲線 a, b 上のある種の周回積分の形で具体的に表される．（特に τ_0, B_ϕ に depend する．）

Step 2. (Inverse problem の考察)　次に，上で求めた具体的表示式を逆に解いて，更に上記の計算が正当化されること（つまり，仮定 (Ass) が正しいこと）を示さねばならない．次の補題が基本的である．

Lemma 1 $\mathcal{D}_\epsilon$ 上 B_ϕ が有界となる為の必要十分条件は

$$\text{Re } J_a^* = \text{Re } J_b^* = 0 \tag{33}$$

で与えられる．更に，この条件 *(33)* を満たす A_ϕ は ϕ の一価函数として一意に定まる．

この補題と上で求めた具体的表示式から，任意に与えられた $\vec{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_5)$ に対して，$u^*(\tau) = u^*(\tau, \vec{s})$, $\tau_0 = \tau_0(\vec{s})$, $B_\phi = B_\phi(\tau, \vec{s})$, $A_\phi = A_\phi(\vec{s})$ が定まる．例えば

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{4\pi i}\left(\Omega_b^* \log(\frac{s_5}{s_2}) + \Omega_a^* \log(is_2)\right), \\ B_\phi &\sim \log(\frac{s_2}{s_5}). \end{aligned}$$

更に，$u(\tau, \vec{s})$ を次の微分方程式の解として定義する．

$$e^{-2i\phi}\left(\frac{du}{d\tau} + \frac{2u}{5\tau}\right)^2 - 2e^{i\phi}u - 4u^3 = a_\phi = A_\phi + \frac{B_\phi}{\tau}. \tag{34}$$

この時，次の (I) と (II) が証明できる．

(I) $u(\tau, \vec{s})$, $(du/d\tau)(\tau, \vec{s})$ は $\mathcal{D}_\epsilon$ において有界．従って，特に仮定 (Ass) は正しい．

(II) そこで，$u(\tau, \vec{s})$ に対して *Step 1* を適用する．結果として monodromy data $\vec{s}_\star = \vec{s}_\star(\tau)$ が得られるが，これに関して次の漸近式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &u(\tau, \vec{s}) \sim u^*(\tau, \vec{s}_\star), \\ &\tau_0(\vec{s}) \sim \tau_0(\vec{s}_\star), \quad B_\phi(\tau, \vec{s}) \sim B_\phi(\tau, \vec{s}_\star), \\ &s_2 \sim s_{2,\star}, \quad s_5 \sim s_{5,\star} \end{aligned}$$

("asymptotically solvable" と呼ばれる）．

最後に，Brouwer の不動点定理を利用すれば，この asymptotical solvability から真に solvable であることが導かれる．即ち，任意に与えられた $\vec{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_5)$ に対して，次の性質を満たす (P_{I}) の解 $\lambda(t)$ が存在することが結論される．

(i) その monodromy data は $\vec{s}$ に一致する．
(ii)

$$\lambda(t) \sim |t|^{1/2}\wp(e^{i\phi}\tau - \tau_0 : g_2, g_3) \qquad (\tau \in \mathcal{D}_\epsilon)$$

(但し $g_2 = -2e^{i\phi}$, $g_3 = -A_\phi$, $\tau = \frac{4}{5}|t|^{5/4}$, $\phi = \arg t$.)

References

[AKT] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. II, Structure of Solutions of Differential Equations, World Scientific, 1996, pp.1–49.

[FIK] A.S. Fokas, A.R. Its and A.A. Kapaev: On the asymptotic analysis of the Painlevé equations via the isomonodromic method, Nonlinearity, **7**(1994), 1291–1325.

[JMU] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I, Physica D, **2**(1981), 306–352.

[Ka] A.A. Kapaev: Asymptotics of solutions of the Painlevé equation of the first kind, Differentsial'nye Uravneniya, **24**(1988), 1684–1695 = Differential Equations, **24**(1989), 1107–1115.

[KaKi] A.A. Kapaev and A.V. Kitaev: Connection formulae for the first Painlevé transcendent in the complex domain, Lett. in Math. Phys., **27**(1993), 243–252.

[Ki1] A.V. Kitaev: Justification of the asymptotic formulas obtained by the isomonodromic deformation method, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov., **179**(1989), 101–109 = J. Soviet Math., **57**(1991), 3131–3135.

[Ki2] ———: Isomonodromic technique and elliptic asymptotics of the first Painlevé transcendent, Algebra i Analiz, **5**(1993), 179–211 = St. Petersburg Math. J., **5**(1994), 577–605.

[Ki3] ———: Elliptic asymptotics of the first and the second Painlevé transcendents, Uspekhi Mat. Nauk, **49**(1994), 77–146 = Russian Math. Surveys, **49**(1994), 81–150.

[KT1] T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. I, Adv. in Math., **118**(1996), 1–33.

[KT2] ———: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. III, Adv. in Math., **134**(1998), 178–218.

[MMT] T. Matano, A. Matumiya and K. Takano: On some Hamiltonian structures of Painlevé systems. II, J. Math. Soc. Japan, **51**(1999), 843–866.

[O1] K. Okamoto: Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales, Japan J. Math., **5**(1979), 1–79.

[O2] ———: Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier systems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **33**(1986), 575–618.

[ST] T. Shioda and K. Takano: On some Hamiltonian structures of Painlevé systems. I, Funkcial. Ekvac., **40**(1997), 271–291.

[T1] Y. Takei: Singular-perturbative reduction to Birkhoff normal form and instanton-type formal solutions of Hamiltonian systems, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **34**(1998), 601–627.

[T2] ———: Painlevé II 型方程式に対するある接続問題について, 数理解析研究所講究録「代数解析と特殊函数」, to appear.

[T3] ———: An explicit description of the connection formula for the first Painlevé equation, Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-linear, Kyoto Univ. Press, to appear.